4 Relationen und Abbildungen

4.0 Vororientierung

Die Begriffe Relation und Abbildung bzw. Funktion sind dem Leser vermutlich noch aus der Schulmathematik bekannt. In diesem Kapitel werden wir für diese Begriffe mengentheoretische Definitionen, sowie anschauliche Beispiele geben.

4.1 Relationen

4.1.1 Geordnete Paare und kartesische Produkte

Das im letzten Kapitel formulierte Extensionalitätsprinzip schränkt uns in der Möglichkeit, uns „unmissverständlich auszudrücken“ oder Dinge ausreichend „gut“ beschreiben zu können, stark ein. Diesem Prinzip folgend könnten wir bisher z.B. ein Wort (Zeichenreihe) nur mit der Menge der darin enthaltenen Buchstaben (Zeichen) identifizieren. Leider kann nur niemand aus der Menge $\{n,i,w,t,h,e,a,c\}$ das Wort „Weihnachten“ herauslesen. Weitere Beispiele wären, ein Musikstück mit der Menge der darin enthaltenen Noten, oder eine Zahlbezeichnung mit der Menge der darin vorkommenden Ziffern zu identifizieren.

Sowohl im Alltag, als auch in der Mathematik, gibt es Situationen in denen die Reihenfolge des Enthaltenseins der „Elemente“ scheinbar doch eine Rolle spielt. Dieser Tatsache trägt unsere bisherige mengentheoretische Formulierung der Mathematik noch nicht genügend Rechnung. Wir müssen daher eine Möglichkeit finden, wie man zwischen den Elementen innerhalb einer Menge eine Anordnung angeben kann.

Bei zweielementigen Mengen könnte man z.B. eines der beiden Elemente kennzeichnen und vereinbaren (z.B. mit Hilfe einer geeigneten Schreibweise), daß das nicht gekennzeichnete Element das erste sein soll. Genauso könnte man vorgehen, wenn das gleiche Element mehrfach vorkommt, denn wenn man die ursprünglich gleichen Elemente unterschiedlich kennzeichnet, so sind sie im Sinne des Extensionalitätsprinzips nicht mehr gleich und können mehrmals in einer Menge enthalten sein. Natürlich ist die „gekennzeichnete“ Menge nicht mehr die gleiche wie die ursprüngliche, zweielementige Menge (siehe Abb 4.1.). Die folgende Definition formuliert die mengentheoretische Umsetzung der oben entwickelten Idee:

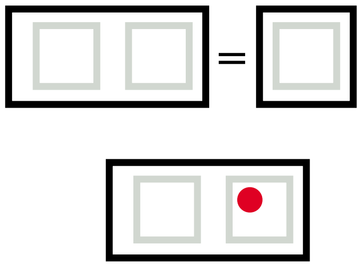

Abb 4.1.: Beispiel für eine durch Kennzeichnung geordnete, zweielementige Menge. Das obere Bild stellt nochmals die Aussage des Extensionalitätsprinzips (**Ext**) in Bezug auf „Mehrfachnennungen“ einzelner Elemente dar. Das untere Bild zeigt einen Weg, im Sinne von **Ext** gleiche Elemente zu unterscheiden.

Definition 4.1 (geordnetes Paar)

Seien $x \in u$ und $y \in v$. Das Objekt

$(x,y) := \{\{x\},\{x,y\}\}$, *wobei* $\{\{x\},\{x,y\}\} \in Pot(Pot(u \cup v))$ *ist*, heißt

das *geordnete Paar* (x,y); x heißt *erste Komponente*, oder *erstes Glied*, oder *erste Koordinate*, y heißt *zweite Komponente*, oder *zweites Glied*, oder *zweite Koordinate von* (x,y).

Für $n \neq 2$ sei

$(x) := x$ und

$(x_0,\ldots,x_n) := ((x_0,\ldots,x_{n-1}),x_n)$, wobei für $0 \leq i \leq n$ gilt, daß $x_i \in u_i$.

heißt auch (geordnetes) *n-Tupel*.

Darstellung von Relationen

Relationen lassen sich auf verschiedene Weisen darstellen. Der Einfachheit halber werden wir nur Darstellungen für zweistellige Relationen behandeln. Als Beispiel dient uns die Teilerrelation, die wir in $\{1,2,3,4,5,6\}^2$ betrachten.

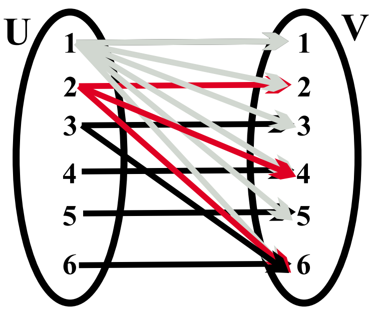

Abb. 4.2.: **Pfeildiagramm**
Jeder Pfeil, der von einem Element aus U zu einem Element aus V führt, stellt ein geordnetes Paar dar. Die Pfeilrichtung weist von der ersten Koordinate zur zweiten Koordinate des Paares. Wenn die Mengen U und V nicht zu viele Elemente enthalten, ist ein Pfeilbild zur Darstellung gut geeignet.

U \ V	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

Abb. 4.3.: **Tabelle**
Für diese Darstellung müssen wir vereinbaren, daß die Elemente der „ersten“ Menge in der vertikalen Eingangsspalte, und die Elemente der zweiten Menge in der horizontalen Eingangsspalte stehen sollen. Die Eins bezeichnet, daß ein Paar zur Relation gehört, die Null bezeichnet, daß ein Paar nicht zur Relation gehört.

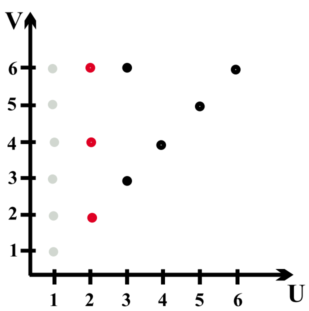

Abb. 4.4.: **Relationsgraph**
Bestehen die „gekreuzten“ Mengen aus Zahlen, so stellt die Darstellung der Relation im Kartesischen Koordinatensystem gerade bei „großen“ Mengen die übersichtlichste Möglichkeit dar.

Aus der Definition sieht man leicht, daß $(x,y)=(y,x)$ nur dann gilt, wenn x=y ist. Das Paar (x,y) ist nach Definition auch eine zweielementige Menge, jedoch gilt $(x,y)\neq\{x,y\}$. Das Wort „Weihnachten“ könnte nun „unmißverständlich“ folgendermaßen geschrieben werden: $(W,e,i,h,n,a,c,h,t,e,n,)$.

Der Leser überlege sich anhand der Definition, daß auch „Paare“ der Form (x,x), (x,x,x), usw. eindeutig definiert sind, d.h. es gilt nicht $(x)=(x,x)=(x,x,x)=\ldots$.

Wir haben nun die Möglichkeit, Beziehungen zwischen Mengen (Relationen) durch geordnete Paare zu beschreiben. Beispielsweise könnte man die Tatsache, daß y eine Teilmenge von x ist, durch das Paar (x,y) ausdrücken. Da für viele Beziehungen (Relationen) $(x,y)\neq(y,x)$ gilt, ist die Schreibweise für Beziehungen mit Hilfe von geordneten Paaren sehr sinnvoll, solange man als einziges Ausdrucksmittel nur Mengen zur Verfügung hat. In Zukunft werden wir daher Beziehungen (Relationen) mit der Menge der geordneten Paare identifizieren.

Definition 4.2 (kartesische Produkte)

Seien $u_0,u_1,\ldots,u_n$ nichtleere Mengen.

Das *kartesische Produkt* (oder *Kreuzprodukt*) $u_0\times u_1\times\ldots\times u_n$ ist wie folgt definiert:

$u_0\times u_1\times\ldots\times u_n:=\{(x_0,x_1,\ldots,x_n)\mid x_0\in u_0\wedge x_1\in u_1\wedge\ldots\wedge x_n\in u_n\}$.

Das kartesische Produkt ist die Menge aller geordneten n-Tupel. Gilt $u:=u_0=u_1=\ldots=u_n$ so schreibt man häufig statt $u\times u\times\ldots\times u$ auch u^{n+1}.

Beispiel: $A:=\{1,2,3,5\}\times\{4,6\}=\{(1,4),(2,4),(3,4),(5,4),\ (1,6),(2,6),(3,6),(5,6)\}$ $=\{\{\{1\},\{1,4\}\},\{\{2\},\{2,4\}\},\{\{3\},\{3,4\}\},\ldots\ \}\subseteq Pot(Pot(\{1,2,3,5,\}\cup\{4,6\}))$

Die Anzahl der Elemente von A ist das Produkt der Anzahlen der Elemente der beiden „gekreuzten“ Mengen.

Definition 4.3 (Relation)

R heißt *n-stellige Relation* genau dann, wenn R eine Teilmenge des kartesischen Produktes $u_1\times\ldots\times u_n$ ist:

$R\subseteq\times u_1\times\ldots\times u_n$.

Für zweistellige Relationen $R\subseteq u\times v:=\{(x,y)\mid x\in u\wedge y\in v\}$ gilt:

$Def(R):=\{x\mid\exists y(x,y)\in R\}$ heißt der *Definitionsbereich* oder der *Urbildbereich* von R und x heißt *Urbild* von y bezüglich R.

$Bild(R):=\{y\mid\exists x(x,y)\in R\}$ heißt der *Wertebereich* oder *Bildbereich* von R und y heißt *Bild* von x bezüglich R.

Eine Relation R ist also eine Menge von n-Tupel.

Beispiele für Relationen:

- Teilmengenrelation: $TM:=\{(x,y)\mid x\subseteq y\}$
- Obermengenrelation: $OM:=\{(x,y)\mid y\subseteq x\}$
- Kleinerrelation: $R_{<}:=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}\wedge x<y\}$
- Größerrelation: $R_{>}:=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}\wedge x>y\}$
- Teilerrelation: $T:=\{(x,n)\mid x,n\in\mathbb{N}\wedge\exists y\in\mathbb{N}(x\bullet y=n)\}$
- Parrallelrelation $P:=\{(x,y)\mid x\parallel y\}$

Wir wollen exemplarisch die Teilmengenrelation in der Menge A angeben. . Die Relation ist durch Angabe der Elemente eindeutig bestimmt. Durch Anwendung der Definition könnten wir den obigen „Ausdruck" jederzeit in eineindeutiger Weise in die „normale" Mengenschreibweise überführen. Häufig wird statt $(x,y)\in R$ auch xRy geschrieben. Statt $(3,4)\in R_<$ wird also i.d.R $3<4$ geschrieben.

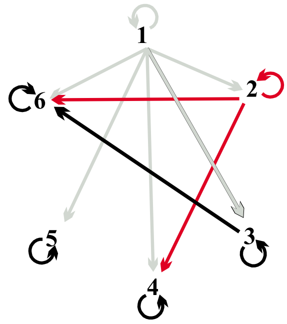

Abb. 4.5.: **Pfeilbild**
Sind die „gekreuzten" Mengen gleich, so kann man bei „kleinen" Mengen auch die obige Form eines Pfeildiagrammes zur Darstellung wählen.

Definition& Satz 4.4 (inverse Relation)

Sei $R\subseteq M\times N$ eine Relation, dann existiert eine eindeutig bestimmte Relation R^{-1}, mit $R^{-1}:=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in R\}$:.

R^{-1} heißt die zu R *inverse Relation*.

Offensichtlich gilt $(R^{-1})^{-1}=R$, sowie $Def(R^{-1})=Bild(R)$, $Bild(R^{-1})=Def(R)$ und $R\subseteq u\times v\Rightarrow R^{-1}\subseteq u\times v$.

Beispiele zueinander inverser Relationen:
- Die Kleinerrelation und die Größerrelation sind zueinander invers, d.h. $(R_<)^{-1}=R_>$.
- Die Teilmengenrelation und die Obermengenrelation sind zueinander invers, d.h. $(TM)^{-1}=OM$.
- Die sogenannte Identitätsrelation $Id_u:=\{(x,x)\,|\,x\in u\}$, bei der jedes Element nur zu sich selbst in Beziehung steht, ist zu sich selbst invers, d.h. $(Id_u)^{-1}=Id_u$.

4.1.2 Ordnungsrelationen

Eine spezielle Klasse von zweistelligen Relationen, bei denen u.a. die „gekreuzten" Mengen gleich sind, ist die sogenannte Ordnungsrelation.

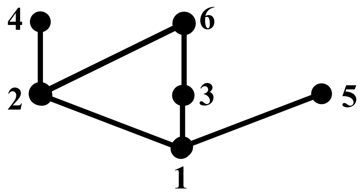

Abb. 4.6.: **Hassediagramm**
Das Hassediagramm ist ein Spezialfall des Pfeilbildes für Ordnungsrelationen. Zur besseren Übersichtlichkeit werden bei der Darstellung folgende Vereinbarungen getroffen:
1. Da alle Pfeilspitzen aufgrund der geschickten Anordnung schräg oder senkrecht nach oben schauen würden, werden diese weggelassen.
2. Innerhalb jeder Pfeilkette würde man aufgrund der Transitivität von Ordnungsrelationen Überbrückungspfeile zeichnen können. Diese werden der Einfachheit halber weggelassen.
3. Ringpfeile werden in Hassediagrammen weggelassen, d.h. man kann nicht erkennen, ob es sich um eine strenge oder nichtstrenge Ordnungsrelation handelt.
Beispiel:
Nach 1. gilt z.B., daß (1,3), (1,5), (1,2), (2,4), (3,6), (2,6) Elemente der Relation sind.
Nach 2. gilt z.B., daß (1,6),(1,4) Elemente der Relation sind.
Nach 3. gilt, daß entweder alle oder keines der Elemente mit sich selbst in Relation stehen.

Was meint man eigentlich damit, wenn man sagt, eine Menge von „Dingen" sei geordnet ? Nehmen wir als Besipiel das Telefonbuch, in dem die Telefonnummern nach den Nachnamen der „Besitzer" geordnet sind. Wenn wir die Telefonnummer von Herrn Maier suchen, so erwarten wir, daß sie nicht gleichzeitig vor und hinter der von Herrn Schulze zu finden ist. Die Reihenfolge muß also eindeutig sein. Diese Eigenschaft nennt der Mathematiker *antisymmetrisch (oder identitiv)*.

Wir wissen, daß die Nummer von Herrn Brunner vor der von Herrn Kunze zu finden ist. Die Nummer von Herrn Kunze wiederum ist vor der von Herrn Maier (die wir suchen) zu finden. Wir erwarten daher, daß auch die Nummer von Herrn Brunner vor der von Herrn Maier zu finden ist. Diese Eigenschaft nennt der Mathematiker *transitiv*.

In unserem speziellen Fall erwarten wir noch, daß man je zwei Nachnamen bezüglich der Reihenfolge, in der sie vorkommen, vergleichen kann. Diese Eigenschaft nennt der Mathematiker *linear*. Nicht jede geordnete Menge erfüllt jedoch die Eigenschaft, linear zu sein.

Nach dieser Betrachtung können wir nun exakt sagen, was wir unter einer geordneten Menge, bzw. unter einer Ordnungsrelation verstehen.

Definition 4.5 (Relationseigenschaften)

Sei M eine nichtleere Menge und $R\subseteq M\times M$ eine zweistellige Relation in M.

a) R *ist antisymmetrisch* (*in* M) $\Leftrightarrow \forall x,y\in M\,(xRy\wedge yRx\Rightarrow x=y)$

$\Leftrightarrow \forall x,y\in M(\{\{x\},\{x,y\}\}\in R\wedge\{\{y\},\{y,x\}\}\in R\Rightarrow x=y)$.

b) R *ist transitiv* (*in* M) $\Leftrightarrow \forall x,y,z\in M\,(xRy\wedge yRz\Rightarrow xRz)$.

c) R *ist linear* (*in* M) $\Leftrightarrow \forall x,y\in M\,(xRy\vee yRx)$.

d) .

e) .

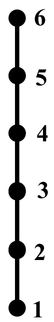

Abb. 4.7.: **Hassediagramm**
Die Abbildung zeigt das Hassediagramm für die Kleiner- bzw. Kleiner-Gleich-Relation in der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 6.
Die Abbildung suggeriert in gewisser Weise die Idee vom Zahlenstrahl und in der Tat könnte man den Zahlenstrahl als ein unendlich „großes“ Hassediagramm für die Kleiner-Relation deuten.

Definition 4.6 (Ordnungsrelation)

Sei M eine nichtleere Menge und $R \subseteq M \times M$ eine zweistellige Relation in M.

a) R ist eine *Ordnungsrelation* $\Leftrightarrow$ R ist antisymmetrisch, transitiv und reflexiv.

b) R ist eine *strenge Ordnungsrelation* $\Leftrightarrow$ R ist antisymmetrisch, ...transitiv und irreflexiv.

c) Ist R eine (strenge) Ordnungsrelation und linear, so heißt R *totale (strenge) Ordnungsrelation*.

Nach Def. 4.6 ist eine alphabetische Ordnung (wie z.B. unser Telefonbuchbeispiel) immer eine totale strenge Ordnungsrelation.
Das für uns wichtigste Beispiel einer (totalen) Ordnungsrelation ist die Beziehung „$\leq$ “ (...ist kleiner oder gleich als...) in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{R}$.
Das wichtigste Beispiel einer (totalen) strengen Ordnungsrelation ist die Beziehung „<“ (...ist kleiner als..) in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{R}$.
Weitere Beispiele für Ordnungsrelationen:

- „x ist älter als y“, wobei x und y Lebewesen sind, ist eine totale Ordnungsrelation, die nicht streng ist (x und y können gleich alt sein).
- Die Teilerrelation $T := \{(x,n) \mid x,n \in \mathbb{N} \wedge \exists y \in \mathbb{N}(x \bullet y = n)\}$ ist eine Ordnungsrelation, die weder streng, noch total ist (z.B. sind 5 und 6 bezüglich der Teilerrelation nicht miteinander vergleichbar).

4.1.3 Äquivalenzrelationen

Eine weitere spezielle Klasse von zweistelligen Relationen, bei denen u.a. die „gekreuzten“ Mengen auch gleich sind, bilden die sogenannten Äquivalenzrelationen.

Was meinen wir damit, wenn wir sagen, zwei „Dinge“ sind äquivalent bzw. gleichwertig (oder gleich) ? Nehmen wir als Beispiel die Reiseziele der Deutschen im letzten Sommerurlaub. Familie Maier fuhr nach Mallorca. Familie Maier steht natürlich bezüglich des Reiseziels mit sich selbst in Beziehung, was trivial erscheint. Die Relation „gleiches Reiseziel“ ist also reflexiv.

Wenn Familie Maier das gleiche Reiseziel hatte wie Familie Schulze, so hatte auch Familie Schulze das gleiche Reiseziel wie Familie Maier, d.h. Familie Schulze wäre auch auf Mallorca gewesen. Diese Eigenschaft nennt der Mathematiker *symmetrisch*.

Wenn jetzt Familie Schulze noch das gleiche Reiseziel hatte wie Familie Himmelsbach, so erwarten wir, daß Familie Maier das gleiche Reiseziel hatte wie Familie Himmelsbach, nämlich Mallorca. Die Relation „gleiches Reiseziel“ ist also auch transitiv.

Definition 4.7 (Symmetrie &Äquivalenzrelation)

Sei M eine nichtleere Menge und $R \subseteq M \times M$ eine zweistellige Relation in M.

a) R *ist symmetrisch* (*in* M) $\Leftrightarrow \forall x,y \in M\,(xRy \Rightarrow yRx)$.

b) R ist eine *Äquivalenzrelation* $\Leftrightarrow$ R ist reflexiv, symmetrisch .... und transitiv.

Wichtige Beispiele für Äquivalenzrelationen in der Mathematik sind u.a. die Gleichheitsrelation „=“ und die Parallelrelation „ “.

Betrachtet man das einleitende Beispiel zu den Reisezielen, so sorgt diese Relation implizit für eine eindeutige Zuteilung aller Deutschen zur Menge der Länder der Erde (Deutsche, die nicht in Urlaub waren, haben Deutschland als Reiseziel). Die so entstehenden Teilmengen der Deutschen mit gleichem Reiseziel sind paarweise elementfremd (disjunkt), d.h. jeder Deutsche ist genau einer dieser Teilmengen zugeordnet. Die von uns näher betrachtete Teilmenge der Mallorcaurlauber besteht gerade aus den Personen, die bezüglich der Eigenschaft, in Mallorca Urlaub gemacht zu haben, „gleichwertig" sind. Wollte man z.B. sehen, wie jemand, der in Malllorca Urlaub macht aussieht, so kann man als „Repräsentanten" (Vertreter) jede Person aus dieser Menge auswählen.

Eine solche Aufteilung einer Menge in disjunkte Teilmengen nennt der Mathematiker eine *Klasseneinteilung* (genau wie die Schüler einer Schule in Klassen eingeteilt werden !).

Definition 4.8 (Klasseneinteilung)

Unter einer *Klasseneinteilung* einer Menge M versteht man eine Menge von Teilmengen $T_i \subseteq M$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\forall T_i (T_i \neq \varnothing)$

(2) $\bigcup T_i = M$

(3) $\forall T_i, T_j (T_i \neq T_j \Rightarrow T_i \cap T_j = \varnothing)$.

Definition 4.9 (Äquivalenzklasse)

Sei $R_{\text{Äqu}} \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation (in M).

Die Menge $[a] := \{z \mid a \in M \wedge z \in M \wedge (z,a) \in R_{\text{Äqu}}\}$ aller zu a in Relation stehenden Elemente von M heißt *Äquivalenzklasse* $[a]$ über a.

Die Menge $M/R_{\text{Äqu}} := \{[a] \mid a \in M\}$ aller Äquivalenzklassen von M heißt *Quotientenmenge* von M nach $R_{\text{Äqu}}$.

Ein Element $z \in [a]$ heißt *Repräsentant* der Äquivalenzklasse $[a]$.

Eine Menge S heißt vollständiges *Repräsentantensystem* von $M/R_{\text{Äqu}}$, wenn S genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse $M/R_{\text{Äqu}}$ enthält.

Satz 4.1 (Gleichheit von Äquivalenzklassen)

Sei $R_{\text{Äqu}} \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation in einer Menge M.

Zwei Äquivalenzklassen $[a],[b] \in M/R_{\text{Äqu}}$ sind genau dann gleich, wenn deren Repräsentanten zueinander äquivalent sind:

$\forall a,b \in M([a]=[b] \Leftrightarrow (a,b) \in R_{\text{Äqu}})$.

Beweis: ($[a]=[b] \Rightarrow (a,b) \in R_{\text{Äqu}}$):
Da $R_{\text{Äqu}}$ reflexiv ist, gilt nach Def.4.9,daß $a \in [a]$, und wegen der Voraussetzung $[a]=[b]$ gilt, daß auch $a \in [b]$ ist. Mit $a \in [b]$ gilt aber nach Def.4.9. auch, daß $(a,b) \in R_{\text{Äqu}}$.
($(a,b) \in R_{\text{Äqu}} \Rightarrow [a]=[b]$):
Sei $(a,b) \in R_{\text{Äqu}}$ und $c \in [b]$. Wegen der Symmetrie gilt auch $(b,c) \in R_{\text{Äqu}}$. Die Transitivität liefert somit $(a,c) \in R_{\text{Äqu}}$, also $c \in [a]$. Hieraus erhalten wir $[b] \subseteq [a]$. Analog läßt sich auf $[a] \subseteq [b]$ schließen. Aus Satz 3.3 folgt damit, daß . qed.

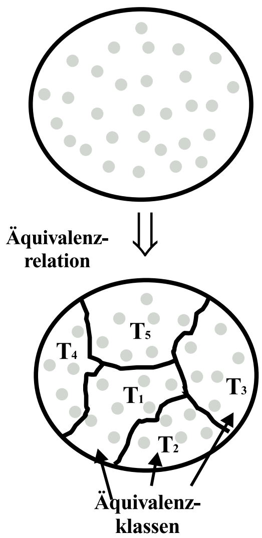

Abb. 4.8.: **Äquivalenzklassen**
Die Abbildung zeigt, wie durch eine Äquivalenzrelation eine Zerlegung in Äquivalenzklassen induziert wird.

Satz 4.2 (Hauptsatz über Äquivalenzrelationen)

Jede Äquivalenzrelation $R_{\text{Äqu}} \subseteq M \times M$ erzeugt eine eindeutig bestimmte Klasseneinteilung von M in Äquivalenzklassen. Umgekehrt existiert zu jeder Klasseneinteilung einer Menge M eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation $R^*_{\text{Äqu}}$, so daß die Menge der Klassen gerade die Quotientenmenge dieser Äquivalenzrelation ist.

Jede Äquivalenzrelation in M erzeugt somit eine neue Menge, und zwar die Menge der Äquivalenzklassen von M. Eine Äquivalenzklasse ist nach Definiton eine Teilmenge der Menge M, wobei die Äquivalenzrelation $R_{\text{Äqu}}$ eine Teilmenge des Kartesischen Produkts $M \times M$ ist.
Im Laufe der nächsten Kapitel werden wir immer wieder massiven Gebrauch von Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen machen.
Einige Beispiele:

- Die Einteilung der Menge der Schüler einer Schule in Klassen ist eine Klasseneinteilung, denn jede Schulklasse enthält mindestens einen Schüler, die Vereinigung der Schüler aus allen Klassen ergibt die Menge der Schüler der Schule, und jeder Schüler gehört genau einer Klasse an. Die einzelnen Schulklassen bilden die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation „Schüler a besucht die gleiche Schulklasse wie Schüler b“. Ein Repräsentantensystem wäre z.B. die Menge der Klassensprecher ohne deren Stellvertreter.
- Die Menge der Kinofilme wird bezüglich der „Altersfreigabe“ in Äquivalenzklassen eingeteilt.
- Die Zuordnung aller deutschen Gemeinden zu Bundesländern ist eine Klasseneinteilung. Die Mengen der Gemeinden des jeweiligen Bundeslands sind gerade die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation „Gemeinde a gehört dem gleichen Bundesland an, wie Gemeinde b“.

Klasseneinteilungen haben auch eine große Bedeutung für die Bildung neuer Begriffe durch Verallgemeinerungen. Die Fähigkeit, Dinge als ähnlich zu erkennen und einander zuzuordnen, wird bereits im Kindesalter entwickelt. Man kann Begriffsbildung häufig über die Bildung von Äquivalenzklassen beschreiben. Wenn wir z.B. einem Mensch vom anderen Stern erklären wollen, was „rot“ bedeutet, so können wir ihm z.B. eine Tomate zeigen. Jedoch ist das, was wir mit „rot“ bezeichnen nicht die Tomate selbst, sondern nur eine Eigenschaft der Tomate, nämlich die Farbe. Zeigen wir unserem außerirdischen Freund jdedoch viele verschiedene Gegenstände und sagen immer dann „rot“ zu ihnen, wenn sie auch wirklich „rot“ sind, so kann der Außerirdische über den Prozess der Äquivalenzklassenbildung allmählich einen Begriff von „rot“ entwickeln, indem er von den übrigen Eigenschaften der Gegenstände abstrahiert.

Der Begriff „rot“ enthält bei näherem Hinsehen eine ähnliche Problematik wie der in Kapitel 2 thematisierte Begriff „drei“. Werden wir nämlich aufgefordert, „rot“ zu zeigen, so können wir immer nur rote Dinge zeigen, genauso wie wir für „drei“ immer nur exemplarisch drei Dinge zeigen können. Dieses Problem ist typisch für abstrahierte Begriffe, die durch Äquivalenzklassenbildung entstehen. Weitere Beispiele für solche Begriffe aus der Mathematik wären „Richtung einer Geraden a“ (Klasse aller zu a parallelen Geraden), „Kardinalzahl 3“ (Klasse aller Mengen mit drei Elementen), oder „Flächeninhalt eines Vielecks“ (Klasse aller zu diesem Vieleck zerlegungsgleichen Vielecke).

4.2 Abbildungen bzw. Funktionen

Häufig möchten wir, daß die Beziehungen zwischen den Elementen zweier Mengen A und B eindeutig sind, d.h. daß jedem Element von A genau ein Element von B zugeordnet wird. Beispielsweise sind wir sehr froh, daß die Relation „Telefonnummern werden Endanschlüsse zugeordnet“ eindeutig ist (Endanschlüsse sind im Zweifel Telefonanlagen!), da wir sonst bei jedem Anruf nur hoffen könnten, statt in Amerika auch wirklich zu Hause in Hintertupfingen anzukommen.

Eindeutig bedeutet in Bezug auf unser Beispiel, daß keiner Telefonnummer mehrere Endanschlüsse zugeordnet werden. Der Mathematiker nennt diese Eigenschaft der Relation *rechtseindeutig*. Außerdem erwarten wir, daß jeder existierenden Telefonnummer auch wirklich ein Endanschluß zugeordnet ist. Diese Eigenschaft der Relation heißt *linkstotal*. Zweistellige Relationen, die diesen beiden Bedingungen genügen, nennt man *Abbildungen* oder *Funktionen*.

Definition 4.10 (Abbildung bzw. Funtion)

Sei $R \subseteq M \times N$ eine Relation.

a) R *ist rechtseindeutig* $\Leftrightarrow \forall x \in M\, \forall y, z \in N\ (xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z)$

b) R *ist linkseindeutig* $\Leftrightarrow \forall x, z \in M\, \forall y \in N\ (xRy \wedge zRy \Rightarrow x = z)$

c) R *ist rechtstotal* $\Leftrightarrow \forall y \in N\, \exists x \in M\ (xRy)$

d) R *ist linkstotal* $\Leftrightarrow \forall x \in M\, \exists y \in N\ (xRy)$

Ist R linkstotal und rechtseindeutig, so heißt R *Abbildung* oder *Funktion*.

Da in dem Fall, daß $f \subseteq M \times N$ eine Abbildung ist, jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zugeordnent wird, schreiben wir i.d.R. statt $(x, y) \in f$ auch $x \mapsto y$, oder $x \mapsto f(x),\ mit\ f(x) = y$. Statt $f \subseteq M \times N$ schreiben wir auch $f : M \to N$. Der Ausdruck $x \mapsto y$ heißt *Abbildungsvorschrift von f*.

Auch an dieser Stelle möchten wir wieder einmal darauf hinweisen, daß diese Schreibweisen keine „neuen“ Gegenstände beschreiben, sondern nur Vereinfachungen darstellen. Mengentheoretisch stellen wir uns eine Abbildung weiterhin genauso vor, wie jede andere Relation auch, da Abbildungen letztendlich, wie Ordnungs- und Äquivalenzrelationen auch, nur eine spezielle Klasse von Relationen bezeichnen.
Da wir gerade beim Thema Spezialfälle sind, nutzen wir die Gelegenheit, einige spezielle „Abbildungstypen“ zu definieren, die in unseren Betrachtungen häufiger vorkommen werden (bzw. schon vorgekommen sind !).

Definition 4.11 (injektiv, surjektiv, bijektiv)

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) f ist *injektiv* $\Leftrightarrow$ f ist eine linkseindeutige Abbildung.

Eine injektive Abbildung heißt *Injektion*.

b) f ist *surjektiv* $\Leftrightarrow$ f ist eine rechtstotale Abbildung.

Eine surjektive Abbildung heißt *Surjektion*.

c) f ist *bijekiv* $\Leftrightarrow$ f ist eine injektive und surjektive Abbildung

$\Leftrightarrow$ f ist eine linkseindeutige, rechtstotale Abbildung.

Eine bijektive Abbildung heißt *Bijektion*.

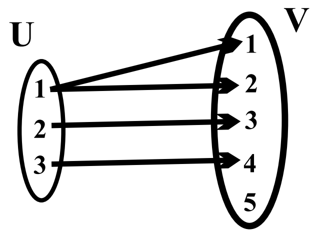

Abb. 4.9.: **linkstotale Relation**
Die Grafik zeigt ein Beispiel für eine linkstotale Relation. Dies erkennt man im Pfeildiagramm daran, daß von jedem Element aus U mindestens ein Pfeil ausgeht.

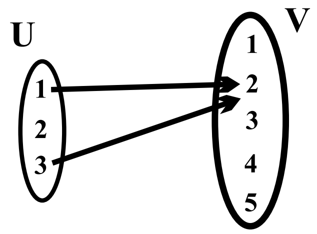

Abb. 4.10.: **rechtseindeutige Relation**
Die Grafik zeigt ein Beispiel für eine rechtseindeutige Relation. Dies erkennt man im Pfeildiagramm daran, daß von jedem Element von U höchstens ein Pfeil ausgeht.

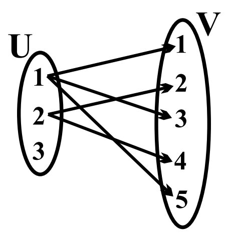

Abb. 4.11.: **rechtstotale Relation**
Die Grafik zeigt ein Beispiel für eine rechtstotale Relation. Dies erkennt man im Pfeildiagramm daran, daß bei jedem Element von V mindestens ein Pfeil ankommt.

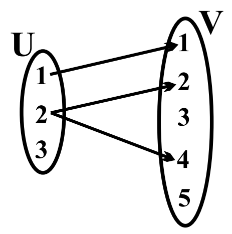

Abb. 4.12.: **linkseindeutige Relation**
Die Grafik zeigt ein Beispiel für eine linkseindeutige Relation. Dies erkennt man im Pfeildiagramm daran, daß bei jedem Element von V höchstens ein Pfeil ankommt.

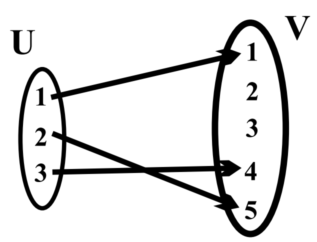

Abb. 4.13.: **Abbildung**
Die Grafik zeigt ein Beispiel für eine Abbildung bzw. Funktion. Dies erkennt man im Pfeildiagramm daran, daß von jedem Element von U genau ein Pfeil ausgeht.

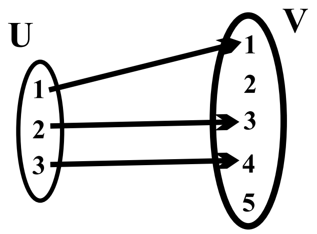

Abb. 4.14.: **injektive Abbildung**
Die Grafik zeigt ein Beispiel für eine injektive Abbildung. Dies erkennt man im Pfeildiagramm daran, daß von jedem Element von U genau ein Pfeil ausgeht und bei jedem Element von V höchstens ein Pfeil ankommt.

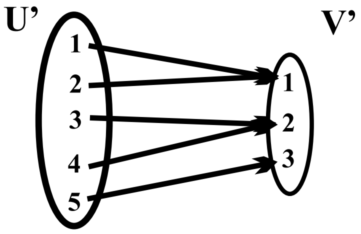

Abb. 4.15.: **surjektive Abbildung**
Die Grafik zeigt ein Beispiel für eine surjektive Abbildung. Dies erkennt man im Pfeildiagramm daran, daß von jedem Element von U' genau ein Pfeil ausgeht und bei jedem Element von V' mindestens ein Pfeil ankommt.

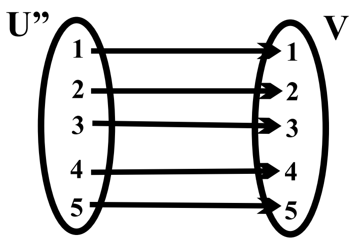

Abb. 4.16.: **bijektive Abbildung**
Die Grafik zeigt ein Beispiel für eine bijektive Abbildung. Dies erkennt man im Pfeildiagramm daran, daß von jedem Element von U" genau ein Pfeil ausgeht und bei jedem Element von V genau ein Pfeil ankommt.

Beispiel: Im Supermarkt werden Produkten Preise zugeordnet. Da jedem Produkt genau ein Preis zugeordnet wird, ist diese Relation eine Abbildung. Wenn wir als Wertebereich die Menge aller möglichen Preise nehmen, ist die Abbildung weder surjektiv noch injektiv. Die Tatsache, das mehrere Produkte den gleichen Preis haben können, ist für die Eigenschaft, eine Abbildung zu sein unerheblich. Wenn wir als Wertemenge alle wirklich existierenden Preise für Produkte annehmen, so ist die Abbildung sogar surjektiv, da jeder Preis von mindestens einem Produkt angenommen wir.

Gehen wir nun zur Obst- und Gemüsetheke. Dort gilt i.d.R. daß die Beziehung „Menge des nachgefragten Gemüses wird ein Preis zugewiesen" sogar eine bijektive Abbildung ist. Diese Beziehung ist uns noch aus der Schulzeit unter der Bezeichnung *proportionale Zuordnung* bekannt. Jede proportionale Zuordnung ist also eine bijektive Abbildung. Der Vorteil von bijektiven Abbildungen ist, daß man in eindeutiger Weise vom Preis auf das Produkt zurückschließen kann (wir haben in diesem Zusammenhang bereits mehrmals statt „bijektiv" den Begriff „eineindeutig" benutzt).

Gerade diese umkehrbare Eindeutigkeit von bijektiven Abbildungen wird im Alltag häufig verwendet. Man denke z.B. an

- Autos werden Autonummern zugeordnet (wäre diese Abbildung nicht bijektiv, könnten Raser problemlos durch eine Radarfalle sausen, ohne identifiziert zu werden)
- Personen werden Fingerabdrücke zugeordnet (für alle Krimi-Fans).
- Berufstätigen Personen werden Sozialversicherungsnummern zugeordnet.
- Jeder Person wird ein Name (incl. Adresse) zugeordnet.

Auch in der Mathematik hat der Abbildungsbegriff eine große Bedeutung. Beispielsweise kann man jede Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionsaufgabe als Abbildung interpretieren. In der Geometrie finden wir Abbildungen in Form von Verschiebung, Spiegelung, Drehung, Streckung usw. vor. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß wir selbst zur axiomatischen Definition der natürlichen Zahlen den Abbildungsbegriff benötigen.

4.3 Rückblick und Ausblick

Wir sind nun an dem Punkt angelangt, daß wir über genügend „Rüstzeug" verfügen, um den Aufbau der Zahlbereiche in Angriff nehmen zu können. Ich habe mich bemüht, die wesentlichen Grundbegriffe (nochmals) zu klären und über den Mengenbegriff in einen gewissen Zusammenhang zu bringen. Der Leser verzeihe mir, daß das eigentliche Thema dieser Hausarbeit erst ab Seite 60 behandelt wird. In den folgenden Kapiteln werden wir regen Gebrauch von den bisher eingeführten Begriffen machen, so daß es für den ungeübten Leser u.U. nötig sein könnte, sich die jeweiligen Definitionen nochmals ins Gedächtnis zu rufen.

4.4 Literaturhinweis

Mathematik - Kurs für Grundschullehrer [1974] (E9 Relationen)

Lehmann, Schulz [1997] (Mengen-Relationen-Funktionen: Eine anschauliche Einführung)

Gerster [1998] (Aussagenlogik, Mengen, Relationen)